R-16

Code: 4308/BL

Faculty of Science

B.Sc (Mathematics) II-Year, CBCS –IV Semester Backlog Examinations, Dec/Jan 2019-20

PAPER: ALGEBRA

Time: 3 hours

Max Marks: 80

Section-A

I. Answer any FIVE of the following questions (5x4=20 Marks)

1. Let G be an Abelian group, then prove that H=$\left\{x \in \frac{G}{x^2} = e\right\}$ is a subgroup of G.
2. Find the order of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$?
3. Let $H = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\dots\dots\}$. Find all the left cosets of H in (Z, +).
4. Prove that the centre Z(G) of a group G is normal subgroup of G.
5. Prove that the intersection of subrings of a ring R is a subring of R.
6. Find all maximal ideals in the ring Z_{12}?
7. Show that $\phi: c \to c$ given by $\phi(a + ib) = a - ib$ is a ring homomorphism.
8. Let $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 3$, and $g(x) = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 4$ are two

   polynomials in $Z_5[x]$. Compute $f(x) + g(x)$ *and* $f(x).g(x)$.

Section-B

II. Answer the following questions (4x15=60 Marks)

9. (a) Define group Let $G = \left\{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \quad a \in R,\ a \neq 0\right\}$ Show that G is a group under matrix multiplication.

   (OR)

   (b) Define cyclic group. Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

10. (a) State and prove Lagrange's theorem. Is it's converse true? Give example.

    (OR)

    (b) Let $\emptyset: G \to \bar{G}$ be a group homomorphism, then prove that $\frac{G}{\ker(\emptyset)} \cong \emptyset(G)$.

11. (a) Define integral domain and field. Prove that every finite integral domain is field.

    (OR)

    (b) Define prime ideal. Let R be a cumulative ring with unity and let A be an ideal of R. Then prove that $\frac{R}{A}$ is an integral domain $\Leftrightarrow$ A is prime ideal.

12. (a) Define ring isomorphism. Let $\Phi: R \to S$ be a ring homomorphism. Then prove that Φ is an isomorphism $\Leftrightarrow \ker(\emptyset) = \{0\}$.

    (OR)

    (b) Let F be a field, $a \epsilon F$, *and* $f(x) \epsilon F[x]$. Then prove that 'a' is a zero of $f(x) \Leftrightarrow (x - a)$ is a *factor of* $f(x)$ Also find zeros of $x^2 + 3x + 2$ in Z_6.

*****

R-16

Code: 4308/BL

Faculty of Science

B.Sc (Mathematics) II-Year, CBCS –IV Semester Backlog Examinations, Dec/Jan 2019-20

PAPER: ALGEBRA

Time: 3 Hours Max Marks: 80

విభాగం-ఎ

I. ఈ క్రింది ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయండి. (5x4=20 Marks)

1. G అనేది ఎబిలియన్ సమూహం అయితే $H = \left\{x \in \frac{G}{x^2} = e\right\}$ అనేది G కి ఉపసమూహం అని చూపండి.
2. ప్రస్తారం $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3\end{pmatrix}$ యొక్క తరగతిని కనుక్కోండి.
3. $H = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\ldots\ldots\}$ అయితే (Z,+) లో H యొక్క అన్ని ఎడమ సహసమితులను కనుక్కోండి.
4. సమూహం G యొక్క కేంద్రం Z(G) అనేది G కి అభిలంబ ఉపసముహం అని చూపండి.
5. వలయం R యొక్క ఉపవలయాల ఛేదనం కూడ R కు ఉపవలయం అవుతుంది అని చూపండి.
6. వలయం Z 12 లో అన్ని గరిష్ఠ ఐడియల్స్ కనుక్కోండి.
7. $\phi: c \to c$ ని $\phi(a+ib) = a - ib$ గా నిర్వచిస్తే ϕ వలయ సమరూపత అవుతుంది అని చూపండి.
8. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 3,\ g(x) = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 4$ అనేవి $Z_5[x]$ లో రెండు బహుపదులు అయితే $f(x) + g(x)$ మరియు $f(x).g(x)$ లను గణించండి.

విభాగం-బి

II. ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయండి. (4x15=60 Marks)

9. (ఎ) సమూహంను నిర్వచించండి. $G: \left\{\begin{bmatrix}a & a\\ a & a\end{bmatrix} / a \in R,\ a \neq o\right\}$ అయితే మాత్రిక గుణకారం దృష్ట్యా G సమూహం అవుతుంది అని చూపండి.

(లేదా)

(బి) చక్రీయ సమూహంను నిర్వచించండి. చక్రీయ సమూహం యొక్క ప్రతి ఉపసమూహం కూడ చక్రీయం అని చూపండి.

10. (ఎ) లెంగ్రాజ్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించండి. దీని విపర్యం నిజామా? ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

(లేదా)

(బి) $\emptyset: G \to \bar{G}$ సమూహ సమరూపత అయితే $\frac{G}{\ker(\emptyset)} \cong \emptyset(G)$ అని చూపండి.

11. (ఎ) పూర్ణాంక ప్రదేశం, క్షేత్రాలను నిర్వచించండి. ప్రతి పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశం క్షేత్రం అవుతుంది అని చూపండి.

(లేదా)

(బి) అభాజ్య (prime ideal) ఐడియల్ ను నిర్వచించండి. R తత్సమ సంహిత వినిమయ వలయం, A అనేది R కు ఐడియల్ అయితే $\frac{R}{A}$ పూర్ణాంక ప్రదేశం $\Leftrightarrow A$ ఆభాజ్య ఐడియల్ అని చూపండి.

12. (ఎ) వలయ తుల్యరూపతను నిర్వచించండి. $\phi: R \to S$ వలయ సమరూపత అయితే ϕ తుల్యరూపత $\Leftrightarrow \ker(\phi) = \{0\}$ అని చూపండి.

(లేదా)

(బి) F క్షేత్రం, $a \epsilon F, f(x) \epsilon F(x)$ 'a' అనేది $f(x)$ కు శూన్యం $\Leftrightarrow (x-a)$ అనేది $f(x)$ కు కారణాంకము అని చూపండి. అదేవిధంగా Z_6 లో $x^2 + 3x + 2$ యొక్క శూన్యాలను కనుక్కోండి.

****